

קורס קדם במתמטיקה למתודים

פרק 31 - חישובון דיפרנציאלי - חילוק פולינומיים ופתרון משוואות
פולינומיאליות

תוכן העניינים

- 1 חילוק פולינומיים
- 2 פתרון משוואות
- 3 שאלות מסכמוות

חילוק פולינומיים:

סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $\overline{p(x)}|q(x)$) יש לבצע 4 שלבים:

- 1) חלוקת האיבר במעלה הגדולה ביותר של $p(x)$ באיבר במעלה הגדולה ביותר של $q(x)$.
- 2) רישום תוצאה החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
- 3) חיסור של תוצאה ההכפלה בפולינום המחלק $p(x)$.
- 4) חוזרת לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגדולה ביותר של $q(x)$ בתוצאה החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד. במידה ותוצאה האחרון מנגינה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב- $q(x)$ אז נקבע לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x-1} \quad (2)$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x-3} \quad (4)$$

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1} \quad (6)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x-2} \quad (8)$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{x+2} \quad (1)$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x+3} \quad (3)$$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x+5} \quad (5)$$

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x^2 - x - 3 \quad (4) \quad x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (3) \quad x^2 + 2x + 5 \quad (2) \quad x - 7 \quad (1)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x-2} \quad (8) \quad 4x^2 + 10x + 1 \quad (7) \quad x^2 + 1 \quad (6) \quad x^2 - 4 \quad (5)$$

פתרונות המשוואות:**סיכום כללי:****משפטים כלליים:**

- לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה n יש בדיקת n שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב $a+bi$ אז גם המספר הצמוד $a-bi$ הוא שורש שלו.
- יהיו $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים. אם לפולינום שורש שהוא מספרשלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי a_0 .
- אם $x=a$ שורש של פולינום $(x)p$, אז הפולינום $p(x)$ מתחולק ב- $x-a$ ללא שארית.
- אם $p(x)$ פולינום ואם $p'(a)=0$ וגם $p(a)=0$ אז $x=a$ הוא שורש כפול.

שאלות:**פתרו את המשוואות הבאות :**

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (2) \qquad k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (1)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (4) \qquad k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (3)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (6) \qquad k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$k_1 = -4, k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (2) \qquad k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 3, k_4 = -5 \quad (1)$$

$$k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2 \quad (4) \qquad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = -1, k_5 = -1 \quad (3)$$

$$k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i \quad (6) \qquad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 1, k_6 = -1 \quad (5)$$

$$k_1 = 1, k_2 = 2, k_{3,4} = \pm 2i \quad (7)$$

שאלות מסכמו:

שאלות:

- 1)** לפניך הפולינום הבא : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- מצא את המקדמים של הפולינום אם נתון כי :
 - הפולינום מתחלק ב- $x+3$ ללא שארית.
 - הפולינום מקיים : $P(4.5) = 27$.
 - לפונקציה $y = P(x)$ יש מקסימום מקומי עבור $x = 0$ ומינימום מקומי עבור $x = \frac{1}{2}$.
 - הצב את המקדמים שקיבלת וسرטט את גרף הפונקציה $y = P(x)$.
- 2)** מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b של הפולינום : $P(x) = ax^3 + bx^2 - 9ax - 3b - 24a$ אם נתון שה- $P(1) = -10$ מתחלק ב- $x-9$ ללא שארית וגם :
- 3)** הוכח כי : $(x-1)^3$ מתחלק ב- $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n+1} - 1$ ללא שארית לכל n טבעי.
- 4)** עבר אלו ערכים של a ו- b מתחלק הפולינום : $P(x) = ax^6 + 4x^5 + bx^4 + 2$ ב- $(x-1)^2$ ללא שארית?
- 5)** אם מחלקים את הפולינום $P(x) = (3x-4)(x-1)$ מקבלים שארית 2, ואם מחלקים אותו ב- $(3x-4)$ מקבלים שארית -2.
מצא את שארית החילוק של הפולינום $P(x) = (x-1)(3x-4)$.
- 6)** נתון הפולינום $P(x)$. אם נחלק אותו ב- x^2-4 נקבל שארית 1, ואם נחלק אותו ב- $x-3$ נקבל שארית 4. מצא את שארית החילוק של הפולינום $P(x) = (4-x^2)(x-3)$.

7) הפולינום : $P(x) = x^5 + bx^4 + cx^2 + 2x - 1$, $(a, b, c \text{ פרמטרים})$ מתחולק ב- $x-1$

עם שארית $R_2 = 41$ ומתחלק ב- $x-2$ עם שארית $R_1 = 2\frac{3}{4}$

א. מצא את b ו- c .

ב. מהו המנה והשארית בחלוקת $P(x)$ ב- $x-3$?

8) נתון הפולינום : $P(x) = x^4 - 5x^3 + ax^2 - 10x - 28$

ידוע כי $P(x)$ מתחולק ללא שארית בפולינום $x^2 - 5x + b$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

ב. חשב את שורשי המשווה $0 = P(x)$ מעל המספרים המרוכבים.

9) עבור אילו ערכים של קבוע k למשווה $-x^3 + (1-k^2)x^2 + (1-3k)x - 1 = 0$ למשווה?

יש פתרון $x=1$? מצא את כל הפתרונות של המשווה עבור k שמצוות.

הערה:

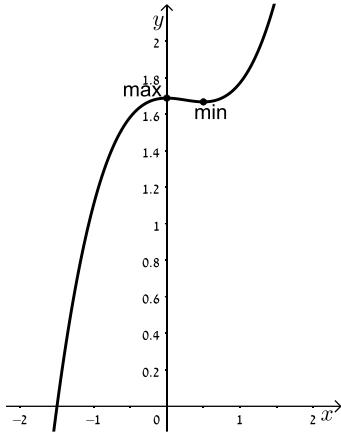
השאלה הבאה מיועדת רק לתלמידים שלמדו נוסחאות וייטה למשווה ממעלה שלישית:

10) מצא את כל שורשי המשווה $t^3 - 2t^2(2 + \sqrt{3}) + t(\sqrt{192} + 1) - \sqrt{12} = 0$

אם ידוע כי מכפלה של שניים משורשים שווה ל-1.

11) מצא פולינום ממשי ממעלת רביעית ששורשיו הם : $-1, 2, 1 + \sqrt{2}i$.

12) פתר את המשווה $z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0$ אם ידוע שאחד מפתרונותיה הוא i .

תשובות סופיות:

ב. להלן גרף: $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + -\frac{1}{4}x^2 + \frac{27}{16}$. א. (1)

. $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$ (2)

שאלה הוכחה. (3)

. $a = 2$, $b = -8$ (4)

. $R(x) = 12x - 14$ (5)

. $R(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{5}$ (6)

. $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$. א. (7)

ב. שארית: $x^3 + 3.25x^2 + 9.75x + 29.75$, מנתה: $91.25x - 1$ (8)

. $x_{1,2} = -2, 7$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$. ב. . $a = -12$, $b = -14$

. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$: עבור $k = 0$ מקבלים (9)

. $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}(-9 \pm \sqrt{85})$: עבור $k = -3$ מקבלים (10)

. $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $t_3 = \sqrt{12}$ (10)

. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6$ (11)

. $z_{1,2} = 1 \pm i$, $z_{3,4} = \pm 1$ (12)